Hola a todos, bienvenidos a esta video clase donde exploraremos el Teorema del Límite Central y utilizaremos la Transformada de Fourier para demostrarlo. Este teorema es esencial en estadística, permitiéndonos entender cómo se comporta la suma de variables aleatorias.

**Variables Aleatorias:**

Empecemos por entender qué son las variables aleatorias. En probabilidad y estadística, una variable aleatoria asigna valores numéricos al resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, lanzar dos dados y sumar los resultados.

Hablemos de la suma de variables aleatorias. Imaginen que tenemos dos variables aleatorias, X e Y, con funciones de densidad de probabilidad y respectivamente. Queremos descubrir la distribución de probabilidad de la suma Z=X+Y

**Suma de Variables Aleatorias:**

La función de densidad de probabilidad de la suma Z se puede expresar como la convolución de las funciones de densidad de probabilidad y

Vamos a ilustrar esto con un ejemplo donde tenemos distribuciones triangular y exponencial. (insertar gif)

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

**Teorema del Límite Central:**

Ahora, el plato principal: el Teorema del Límite Central. Imaginen un conjunto de variables aleatorias (X\_1, X\_2, ..., X\_n) independientes e idénticamente distribuidas, con una media y desviación estándar

El Teorema del Límite Central nos dice que la suma normalizada de estas variables:

se aproxima a una distribución normal estándar a medida que n tiende a infinito. Esto es fundamental en estadística y nos permite trabajar con distribuciones normales, incluso si la distribución original es desconocida.

**Ejemplo del Teorema:**

Para ilustrar, veremos cómo la suma de valores al lanzar dos dados converge a una distribución normal a medida que aumentamos el número de experimentos.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

**Observaciones Importantes:**

El Teorema del Límite Central tiene implicaciones cruciales en la inferencia estadística. Nos permite realizar inferencias sobre la media de una población, incluso cuando la distribución de la población es desconocida. Esto es invaluable en la práctica.

La conexión con la Transformada de Fourier destaca la importancia de la frecuencia y la convolución en la aproximación de distribuciones. La convolución suaviza la distribución, haciéndola similar a una función gaussiana, esencial en el Teorema del Límite Central.

**Demostración del teorema del límite central**

Consideremos la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas donde

Queremos decir que se distribuye como una gaussiana a medida que n aumenta, pero ¿cuál gaussiana? La media y la desviación estándar para las X son todas iguales, pero para están cambiando con n. Sin embargo, no es difícil mostrar que para la media escala por n y, por lo tanto, la desviación estándar escala por

Un conjunto de letras blancas en un fondo blanco

Descripción generada automáticamente con confianza media

Así que para dar sentido a que se aproxime a una gaussiana particular, debemos recentrar y reescalar la suma, fijar la media en cero y la desviación estándar en 1. Es decir, deberíamos trabajar con y preguntarnos qué sucede cuando n🡪 Una forma del Teorema del Límite Central dice que:

Imagen de la pantalla de un celular con letras

Descripción generada automáticamente con confianza baja

En el lado derecho está la gaussiana con media 0 y desviación estándar 1. El teorema dice que las probabilidades para la suma normalizada de las variables aleatorias se aproximan a aquellas basadas en esta gaussiana.

Ahora, la media de es cero, pero la desviación estándar es así que queremos trabajar con . ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de esto? Hemos demostrado que la función de densidad de probabilidad para es

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad para

es

**Algunas igualdades importantes**

Asumiendo que y para las X Esto significa que

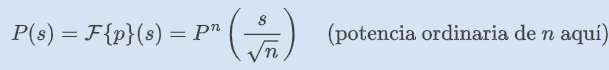
Que es verdadero para cada función de densidad de probabilidad.

**Demostración**

Sean variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y desviación estándar 1. Con p\_n(x) la función de densidad de probabilidad para . Entonces

La idea es tomar la transformada de Fourier de , que, por el Teorema de Convolución, será esencialmente el producto de las transformadas de Fourier de p. Los productos son más fáciles que las convoluciones, y la esperanza es usar las suposiciones sobre p para obtener alguna información sobre la forma de este producto a medida que .

Comencemos con la transformada de Fourier de



Texto, Carta

Descripción generada automáticamente